Probabilités 1 - Probabilités sur un univers fini

1 Représentation ensembliste des évènements aléatoires

"Définitions".

► *Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat. Les résultats possibles sont les **éventualités**. L'ensemble des résultats possibles est appelé **univers des possibles**, souvent noté* Ω.

Exemple : jet d'un dé. Six éventualités :

$$\begin{array}{l} \omega_1 = \textit{(le résultat est 1)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \omega_6 = \textit{(le résultat est 6)} \end{array} \qquad\qquad \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$$

► *Un **évènement aléatoire** A est un évènement qui peut se produire ou non, selon le résultat de l'expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des éventualités qui le réalisent. Il s'agit donc d'une partie de* Ω *:* $A \subset \Omega$.

Exemple du jet de dé, $A = (\textit{le résultat est pair})$. $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Vocabulaire.

- *Si A ne contient qu'une éventualité, on dit que A est un singleton.*
- Ω *est appelé évènement certain.*
- $\varnothing$ *est appelé évènement impossible.*

Opérations ensemblistes : la représentation des évènements aléatoires par des ensembles permet d'utiliser les opérations ensemblistes élémentaires pour traduire certains évènements.

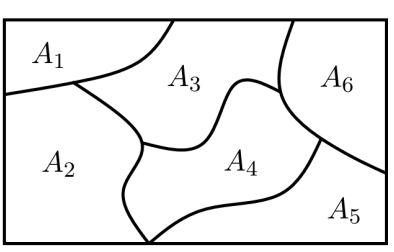
— L'évènement (A **ou** B) est représenté par l'ensemble $A \cup B$.
— L'évènement (A **et** B) est représenté par l'ensemble $A \cap B$.
— L'évènement $\overline{A} = (A$ ne se réalise pas), appelé évènement contraire de A, est représenté par le complémentaire de $A : \Omega \setminus A$.

A noter que le fait que la réalisation de A entraîne celle de B se traduit par $A \subset B$.

Définition (Evènements incompatibles)**.** *Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés l'un et l'autre, c'est-à-dire lorsque* $\boxed{A \cap B = \varnothing}$.

Définition. *Une famille finie d'évènements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ forme un **système complet d'évènements (SCE)** si les A_i recouvrent Ω et sont deux à deux incompatibles. Autrement dit si :*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \;=\; A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \;=\; \Omega$$
$$\textit{et } \forall i, j \in [\![1,n]\!] \;\; tq \;\; i \neq j \,, \;\; A_i \cap A_j = \varnothing.$$



Exemple du dé : les évènements $\begin{cases} A_1 = \{\omega_1, \omega_2\} \\ A_2 = \{\omega_3\} \\ A_3 = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\} \end{cases}$ *forment un SCE de* Ω.

Cf exo 1

2 Espace probabilisé fini

Définition. *Soit Ω un ensemble fini, non vide.*
On appelle ***probabilité*** *sur Ω toute application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ qui vérifie :*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
2. *si $A \cap B = \varnothing$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.*

On dit alors que le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini, et pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle ***probabilité*** *de A le nombre $\mathbb{P}(A)$.*

Remarque. *Cette définition entraîne (par récurrence sur n) que si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille d'évènements* ***deux à deux incompatibles****, alors :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

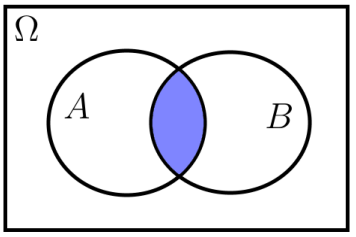
En effet, dans l'hérédité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \qquad \text{car } \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ et } A_{n+1} \text{ sont disjoints} \\
&\underset{HR}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i)
\end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont des conséquences directes de la définition d'une probabilité.

Propriétés. *Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, soit A et B deux évènements. Alors :*

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- *si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.*



On a au passage que $\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\overline{\Omega}) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

Vocabulaire. *Soit I un ensemble fini. Une* ***distribution de probabilités*** *sur I est une famille de nombre positifs $(p_i)_{i\in I}$ vérifiant $\sum_{i\in I} p_i = 1$.*

Remarque. *Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, la famille $\big(\mathbb{P}(\{\omega\})\big)_{\omega\in\Omega}$ est une distribution de probabilités sur Ω.*
De plus, cette distribution caractérise entièrement la probabilité $\mathbb{P}$. En effet, tout évènement $A \subset \Omega$ est un ensemble fini, donc de la forme $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$.

Donc en écrivant $A = \underbrace{\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \ldots \cup \{\omega_k\}}_{\text{incompatibles 2 à 2}}$, on a $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$.

Théorème/définition (Equiprobabilité, probabilité uniforme)**.**
Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini.
La ***probabilité uniforme*** *est la proba $\mathbb{P}$ qui donne* ***la même probabilité à tous les singletons*** *(nécessairement $\frac{1}{n}$ pour que la somme fasse 1).*
Autrement dit, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n}$.
Dans ces conditions, si $A \subset \Omega$, alors $\mathbb{P}(A) = \dfrac{Card(A)}{n}$.

Démonstration. Soit $p = \mathrm{Card}(A)$ et $a_1, \ldots, a_p$ les éléments de A. Alors :

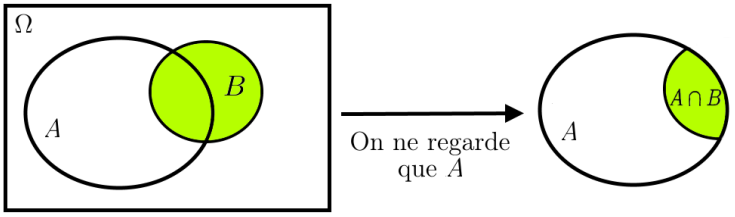
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$$

□

3 Conditionnement

Définition (Probabilité conditionnelle)**.**
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un évènement de probabilité non nulle. Pour tout évènement $B \subset \Omega$, on définit la ***probabilité conditionnelle de*** B ***sachant*** A *par*

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}} \qquad \textit{(également notée } \mathbb{P}(B \mid A)\textit{)}$$



Remarques.

— *Par définition, on a*

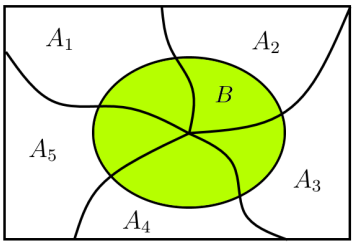
$$\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)}$$

Cette relation est en fait plus importante que la définition de $\mathbb{P}_A(B)$. De plus, lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$, comme $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, on s'autorise de manipuler le produit $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ en posant $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = 0$, alors que pourtant la quantité seule $\mathbb{P}_A(B)$ n'est pas définie.

— *L'application* $\mathbb{P}_A : \begin{pmatrix} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ B & \longmapsto & \mathbb{P}_A(B) \end{pmatrix}$ *est une probabilité sur Ω. (simples vérifications)*

Théorème (Formule des probabilités totales)**.**
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un SCE de Ω tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, et B un évènement. On a les égalités :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B) \end{aligned}$$



Démonstration. Tout part de l'égalité d'ensemble : $B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$.

- Elle est vraie car comme les A_i forment un SCE, tout élément de B appartient à l'un des A_i, et donc à l'un des ensembles $B \cap A_i$. Cela montre l'inclusion $\subset$. L'inclusion réciproque est claire, puisque chaque $B \cap A_i$ est par définition inclus dans B.
- L'union est disjointe, puisque comme pour tous $i \neq j$ de $[\![1, n]\!]$ on a $A_i \cap A_j = \varnothing$, on a à plus forte raison $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \varnothing$.

Par conséquent :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Enfin, on a bien pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B)$, par définition du conditionnement. □

Cf exo 2

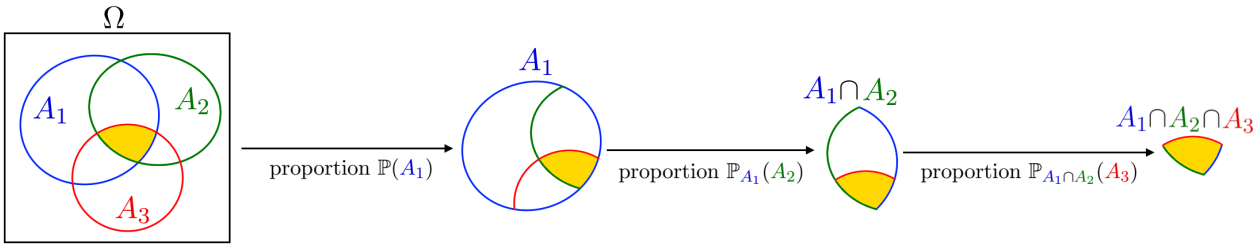
Remarque. *Pour deux évènements A et B de probabilité non nulle, en écrivant les deux relations $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$, on peut exprimer $\mathbb{P}_B(A)$ en fonction de $\mathbb{P}_A(B)$:*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

C'est la formule de Bayes.

Théorème (Formule des probabilités composées)**.**
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ *une suite d'évènements tels que* $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$*. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\boldsymbol{A_1 \cap \dots \cap A_n}\right) = \mathbb{P}(\boldsymbol{A_1}) \times \mathbb{P}_{A_1}(\boldsymbol{A_2}) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(\boldsymbol{A_3}) \times \cdots \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(\boldsymbol{A_n})$$



Démonstration. On procède récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$, en posant :

$$\mathcal{H}(k) \ : \ " \ \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i) \ "$$

— Initialisation : $\mathcal{H}(1)$ signifie $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$, ce qui est vrai.
— Hérédité : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose $\mathcal{H}(k)$. On écrit alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right)$$

On applique alors $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(D)$ aux ensembles $C = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ et $D = A_{k+1}$ (l'évènement C est bien de probabilité non nulle par hypothèse, puisque qu'il contient $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(A_{k+1}) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i)\right) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_k}(A_{k+1}) \\
&= \prod_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i)
\end{aligned}$$

Cela montre $\mathcal{H}(k+1)$.
— La phrase $\mathcal{H}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, et donc en particulier pour $k = n$.

□

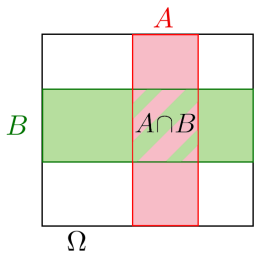
Cf exo 3

4 Evènements indépendants

On se fixe $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

Définition. *On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** (et on note $A \perp\!\!\!\perp B$) si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$



Remarque. *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, on a toujours $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$, d'où l'équivalence :*

$$(A \perp\!\!\!\perp B) \iff \boxed{\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)}$$

Propriétés. *Si $A \perp\!\!\!\perp B$, alors :*
- $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$
- $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$
- $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$

Démonstration. Il suffit de montrer la première propriété, puisqu'elle implique les deux autres. Supposons $A \perp\!\!\!\perp B$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\big((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\big) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \qquad \text{(les deux évènements sont incompatibles)} \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \qquad \text{(indépendance de } A \text{ et } B\text{)}
\end{aligned}$$

D'où, en isolant $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$:

$$\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$$

Cela montre bien $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$. □

Définition. *Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une famille d'évènements. On dit que les A_i sont **indépendants** si pour toute famille d'indices $i_1, \ldots, i_k \in [\![1, n]\!]$ deux à deux distincts on a*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \;=\; \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Exemple : pour $n = 3$, trois évènements A_1, A_2 et A_3 sont indépendants si on a les 4 égalités suivantes :

$$\begin{cases}
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \;=\; \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) \;=\; \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \;=\; \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3) \\
\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \;=\; \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)
\end{cases}$$

Attention : pour $n \geqslant 3$, l'indépendance des A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance (en tant que famille d'évènements).

Proposition. *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les évènements $A_1, \ldots, \overline{A_i}, \ldots, A_n$ sont aussi indépendants.*

Démonstration. Si l'on considère une sous-famille $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ comprenant l'évènement A_i que l'on considère, tout se ramène à la démonstration que nous avions faite pour deux évènements A et B, avec $B = A_i$ et A l'intersection des autres A_{i_j}. □

Cf exo 4

Définition (Indépendance conditionnelle)**.** *On dit que deux évènements A et B sont indépendants conditionnellement à un troisième évènement C (de probabilité non nulle) si :*

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}_C(B)$$

En pratique, cette situation se trouve typiquement lorsque deux évènements A et B (pas forcément indépendants) deviennent indépendants après qu'un évènement C a lieu.
Voici un exemple un peu grossier, pour comprendre l'idée. Posons l'évènement

$$C \ : \text{"Il fait chaud aujourd'hui"}$$

et donc $\overline{C}$: "Il ne fait pas chaud aujourd'hui". On considère deux personnes Axel et Brice, qui ne se connaissent pas, et les évènements :

$$A \ : \text{"Axel porte un short"}$$
$$B \ : \text{"Brice porte un short"}$$

Sachant C, les évènements A et B peuvent raisonnablement être considérés comme indépendants, car le choix vestimentaire d'Axel le matin n'influence en rien celui de Brice, et inversement. On a donc bien :

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A) \times \mathbb{P}_C(B)$$

En revanche, dans l'absolu, et donc sans aucune information sur le temps qu'il fait, A et B ne sont pas indépendants ! En effet, l'information selon laquelle Axel porte un short augmente clairement la probabilité que Brice en porte un, car cela signifie qu'il fait probablement beau ! On a donc :

$$\mathbb{P}_A(B) > \mathbb{P}(B)$$

et donc $\mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. Les évènements A et B sont en fait corrélés positivement (voir plus tard le cours sur la corrélation).

Cf exo 7